



Univerzitet u Zenici
Politehnički fakultet
Odsjek: Građevinarstvo
Zenica, 23.01.2014.

Drugi parcijalni iz Inženjerske matematike III

Napomena: Svaku formulu koju mislite koristiti, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

1. Naći standardnu devijaciju, raspon i interkvartilni raspon podataka datih u tabeli.

Početna plata	Frekvencija
47	4
48	1
49	3
50	5
51	8
52	10
54	5
56	2
57	3
60	1

Predstaviti podatke grafički pomoću histograma i poligona frekvencija (histograma frekvencija treba da ima 6 intervala). Na kraju odrediti sredinu uzorka, medijanu uzorka i mod uzorka.

2. U kutiji se nalazi 50 šarafa od kojih je 40 dobrih i 10 loših.
(20%) (a) Na koliko se načina može formirati uzorak od 5 šarafa?
(80%) (b) Koliko se može formirati uzoraka sa 5 šarafa od kojih su 2 loša?
3. Među turistima u jednom skijaškom centru 60% su muškarci. Pored toga, 80% žena i 60% muškaraca su domaći turisti. Izračunati vjerovatnoću da će na slučaj odabrana osoba biti:
(a) državljanin naše zemlje;
(b) strana turistkinja.
4. Pretpostavimo da, ako je emitovan signal intenziteta μ sa određene zvijezde, da vrijednost koja je primljena na poziciji opažanja na zemlji je normalna slučajna varijabla sa sredinom μ i standardnom devijacijom 4. Drugim riječima, vrijednost emitovanog signala je promjenjena pomoću *slučajnog šuma*, koji ima normalnu distribuciju sa sredinom 0 i standardnom devijacijom 4. Pretpostavljeno je, da je intenzitet signala jednak 10.
(40%) (a) Testirati da li je hipoteza vjerodostojna ako je isti signal nezavisno primljen 20 puta i od 20 dobijenih vrijednosti dobijeni prosjek je 11,6. Koristiti 5 postotni nivo značajnosti.
(40%) (b) Pretpostavimo da je prosjek od 20 vrijednosti jednak 10,8. Odrediti p vrijednost i objasniti za koje nivoe značajnosti H_0 neće biti odbačena. Isto ovo sprovesti za slučaj kada je sredina uzorka 7,8.

Zadaci su skinuti sa stranice pf.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na infoarrt@gmail.com

#) Nadi standardnu devijaciju, raspon i interkvartilni raspon podataka datih u tabeli.

Početak plata	Frekvencija
47	4
48	1
49	3
50	5
51	8
52	10
54	5
56	2
57	3
60	1

Predstaviti podatke grafički pomoću histograma i poligona frekvencija (histogram frekvencija treba da ima 6 intervala). Na kraju odrediti sredinu uzorka, medijanu uzorka i mod uzorka.

Rj. Standardnu devijaciju tražimo po formuli

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}}$$

Suma frekvencija je $4+1+3+5+8+10+5+2+3+1=42$

$$\bar{x} = \frac{47 \cdot 4 + 48 \cdot 1 + 49 \cdot 3 + 50 \cdot 5 + 51 \cdot 8 + 52 \cdot 10 + 54 \cdot 5 + 56 \cdot 2 + 57 \cdot 3 + 60 \cdot 1}{42} = \frac{1087}{42} \approx 51,7619$$

Sredina uzorka je $\bar{x} = \frac{1087}{42}$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 4 \cdot 47^2 + 1 \cdot 48^2 + \dots + 1 \cdot 60^2 = 13102$$

$$s^2 = \frac{13102 - 42 \cdot \frac{1087}{21}}{41} = \frac{10928}{41} \approx 266,5366$$

Standardna devijacija uzorka je $s = 16,3259$.

Raspon uzorka je $R = 60 - 47 = 13$.

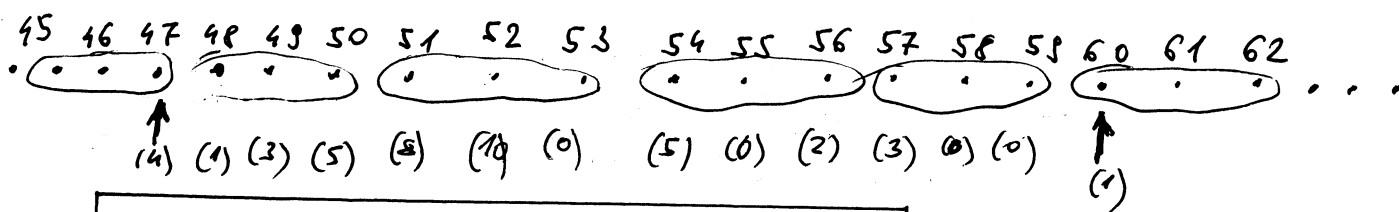
Odredimo 25-ti i 75-ti postotak uzorka

$0,25 \cdot 42 = 10,5$ nije cijeli broj \Rightarrow treba nam 11. najmanje vrijednost na listi (broj 50)

$0,75 \cdot 42 = 31,5$ nije cijeli broj \Rightarrow treba nam 32 najmanje vrijednost na listi (vrijednost 54)

Interkvartilni raspon uzorka je 4.

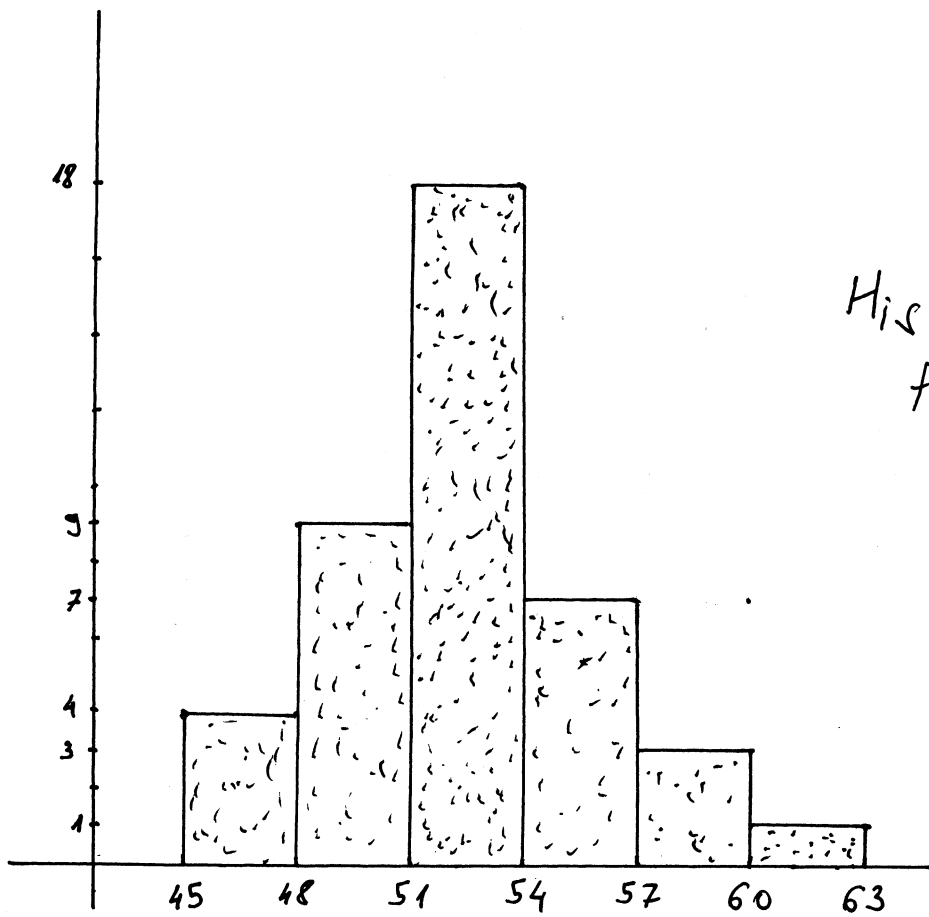
Želimo nacrtati histogram sa 6 intervala. Primjetimo da je raspon uzorka 13 što znači da dužina intervala mora biti veća od 2.



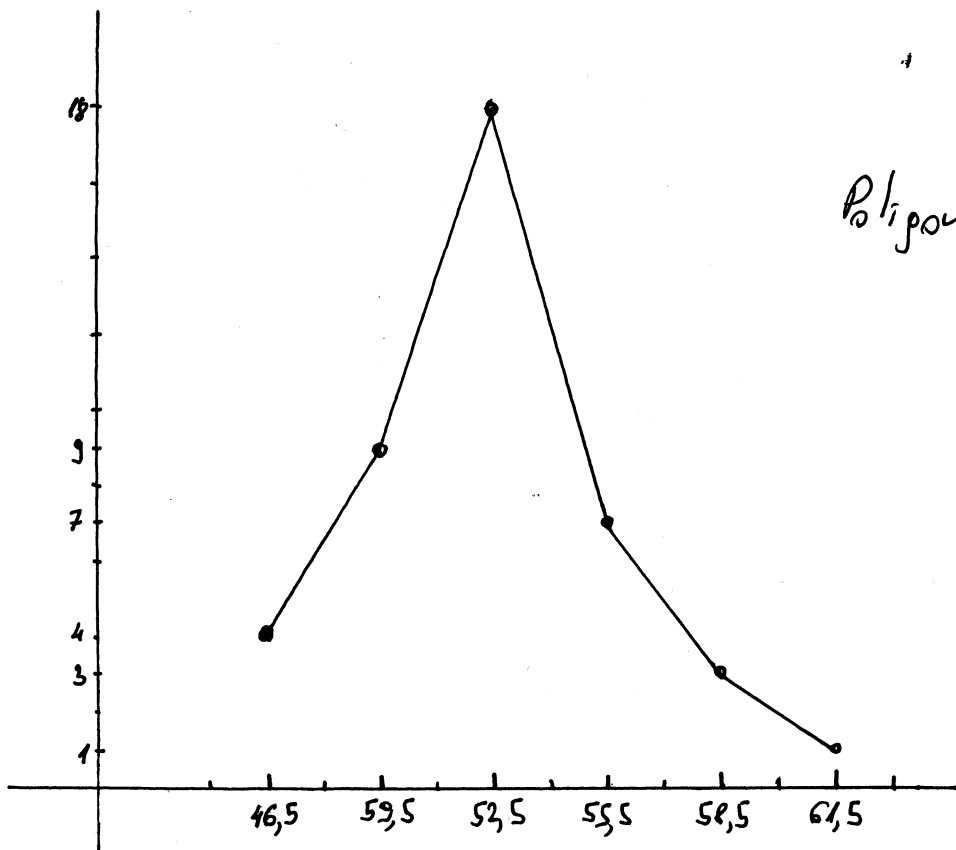
Klase intervala	Frekvencija
[45, 48)	4
[48, 51)	9
[51, 54)	18
[54, 57)	7
[57, 60)	3
[60, 63)	1

$$\Sigma = 42$$

⋮
20 51
21 51
22 52
23 52
⋮



Histogram
frekvencije



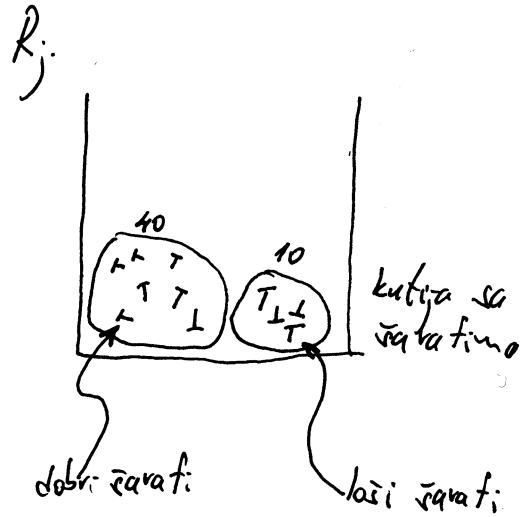
Poligon
frekvencija

Srednju uzorka smo već izračunali: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{1087}{21} \approx 51,7619$
 Broj podataka je paran, pa je medijana uzorka $\frac{51+52}{2} = 51,5$
 Mod uzorka je 52. (mod uzorka je po definiciji vrijednost koja ima najveću frekvenciju)

U kutiji se nalazi 50 šarafa od kojih je 40 dobrih i 10 loših.

(a) Na koliko se načina može formirati uzorak od 5 šarafa?

(b) Koliko se može formirati uzoraka sa 5 šarafa od kojih su 2 loša?



(a) Ako zamislimo da su svi šarafi obojeni različitim bojama, problem se svodi na formiranje svih mogućih nizova od 5 boja u kome redoslijed nije bitan. Koristimo kombinacije bez ponavljanja

$$C_5^{50} = \binom{50}{5} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2118760$$

(kombinacija bez ponavljanja, pedesetog reda, pete klase)

(b) Koliko se može formirati uzoraka od po 2 loša šarafa?

$$C_2^{10} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$$

Koliko se može formirati uzoraka od po 3 dobra šarafa?

$$C_3^{40} = \binom{40}{3} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 9880$$

Sad ako svakoj kombinaciji od 2 loša šarafa pridružimo kombinaciju od 3 dobra šarafa, kao rezultat ćemo dobiti uzorak od 5 šarafa od kojih su 2 loša:

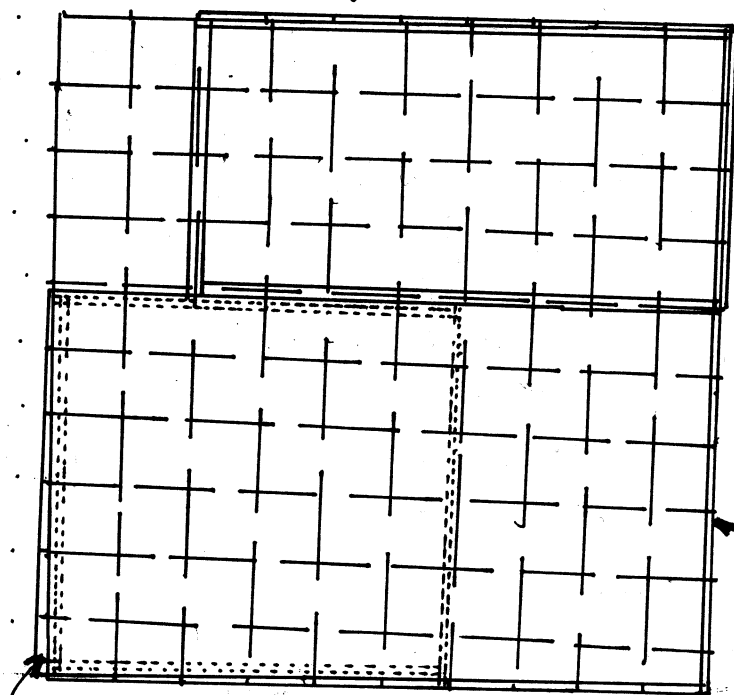
$$45 \cdot 9880 = 444600$$

Među turistima u jednom skijaškom centru 60% su muškarci. Pored toga, 80% žena i 60% muškaraca su domaći turisti. Izračunati vjerovatnoću da će na sluzaj odabrana osoba biti:

- državljanin naše zemlje;
- strana turistkinja.

Rj.

turisti u skijaškom centru



80% žena su domaći turisti

60% turista su muškarci

60% muškaraca su domaći turisti

I način:

Primjetimo da turiste u skijaškom centru možemo predstaviti kao kvadrat dimenzija 10 puta 10 cm.

Ako sa M označimo skup muških turista, tada je vjerovatnoća da je na slučajaj način izabrani turista muškarac jednaka

$$P(M) = \frac{60}{100} = 0,6$$

II način - upotrebom geometrijske vjerovatnoće (vidi slika lijevo)

$$(a) P(D) = \frac{8 \cdot 4 + 6 \cdot 6}{100} = 0,68$$

$$(b) P(\bar{Z}S) = \frac{2 \cdot 4}{100} = 0,08$$

$$P(S) = \frac{2 \cdot 4 + 4 \cdot 6}{100} = 0,32 \quad \Rightarrow P(\bar{Z}S) = 0,25$$

a ako sa \check{Z} označimo skup ženskih turista, verovatnoća da je slučajno izabrani turist žena

$$P(\check{Z}) = 1 - P(M) = \frac{40}{100} = 0,4.$$

Dalje, ako sa D označimo skup domaćih turista

$$P(D|M) = 0,6; \quad P(D|\check{Z}) = 0,8$$

(gdje $D|M$ označava skup domaćih turista koji su muškog pola a sa $D|\check{Z}$ smo označili skup domaćih turista ženskog pola)

$$(a) \quad \overline{D} = D \cap (M \cup \check{Z})$$

$$P(D) = P(D \cap M) + P(D \cap \check{Z}) = P(D|M) + P(D|\check{Z}) =$$

$$= P(D|M)P(M) + P(D|\check{Z})P(\check{Z}) = 0,6 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,4 = 0,68.$$

Ti me, verovatnoća da je na slučaj izabran; turista domaći jednaka je 0,68.

(b) Označimo sa T skup svih turista, a sa S skup stranih turista. Primjetimo

$$T = S \cup D \quad ; \quad S \cap D = \emptyset \Rightarrow P(S) = 1 - P(D) = 1 - 0,68 = 0,32$$

Kako je $\check{Z} = \check{Z} \cap (S \cup D) = (\check{Z} \cap S) \cup (\check{Z} \cap D)$ to je

$$P(\check{Z}) = P(\check{Z} \cap D) + P(\check{Z} \cap S) = \underbrace{P(\check{Z}|D) \cdot P(D)} + P(\check{Z}|S) P(S) \quad \dots (*)$$

Ako iskoristimo jednakost $P(D|\check{Z})P(\check{Z}) = \underbrace{P(\check{Z}|D) \cdot P(D)}$ na (*) imamo

$$P(\check{Z}) = 0,32 + P(\check{Z}|S) \cdot 0,32$$

$$\Rightarrow P(\check{Z}|S) = 0,25$$

← verovatnoća da je slučajno izabrani turista ženskog pola

0,4

Ⓝ Pretpostavimo da, ako je emitovan signal intenziteta μ sa određene zvijezde, da vrijednost koja je primljena na poziciji opažanja na zemlji je normalna slučajna varijabla sa sredinom μ i standardnom devijacijom 4. Drugim riječima, vrijednost emitovanog signala je promijenjena pomoću slučajnog zuma, koji ima normalnu distribuciju sa sredinom 0 i standardnom devijacijom 4. Pretpostavljeno je, da je intenzitet signala jednak 10.

(a) Testirati da li je hipoteza uverodostojna ako je isti signal nezavisno primljen 20 puta i od 20 dobijenih vrijednosti dobijeni prosjek je 11,6. Konstatiti 5% nivo značajnosti.

(b) Pretpostavimo da je prosjek od 20 vrijednosti jednak 19,8. Odrediti p vrijednost i objasniti za koje nivoe značajnosti H_0 neће biti odbacena, isto ovo sproveriti kada je sredina uzorka 7,8.

fj.

(a) Iz pretpostavke zadatka uulta hipoteza je

$$H_0: \mu = 10$$

dok je njena alternativa

$$H_1: \mu \neq 10$$

Želimo konstatiti 5% nivo značajnosti, tj. $\alpha = 0,05$.

$$z_{0,05} = ?$$

$$P\{Z < z_{0,05}\} = 1 - P\{Z > z_{0,05}\} = 0,95$$

$$P\{Z < 1,64\} = 0,9495$$

$$P\{Z < 1,65\} = 0,9505 \quad \Rightarrow \quad z_{0,05} = 1,645$$

Prizjebimo se:

$$H_0 \quad H_1 \\ \mu = \mu_0 \quad \mu \neq \mu_0$$

$$\text{Test statistika (TS)} \\ \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}$$

Test α -nivoa značajnosti.
odbači H_0 , ako je $|TS| \geq z_{\alpha/2}$
nema; odbaciti, u suprotnom

p vrijednost ako je $TS = v$
 $2P\{Z \geq |v|\}$.

Prema tome nama treba $z_{0,025} (= z_{1/2})$

$$z_{0,025} = ?$$

$$P\{Z < z_{0,025}\} = 1 - P\{Z > z_{0,025}\} = 0,975 \quad \begin{array}{l} \text{iz Tabele} \\ \Rightarrow z_{0,025} = 1,96 \end{array}$$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\bar{X} - \mu_0| = \frac{\sqrt{20}}{4} |11,6 - 10| = 1,79$$

Kako je ova vrijednost manja od 1,96, dala hipoteza je vjerodostojna.

(b) Pretpostavimo da je $\bar{X} = 10,8$. Apsolutna vrijednost test statistike je

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\bar{X} - \mu_0| = \frac{\sqrt{20}}{4} |10,8 - 10| = 0,894$$

$$\begin{aligned} \text{Kako je } P\{|Z| \geq 0,894\} &= 2P\{Z \geq 0,894\} = 2(1 - P\{Z \leq 0,894\}) = \\ &= 2(1 - 0,8143) = 0,371 \quad (\text{iz tabele}) \end{aligned}$$

sljedi da je $p = 0,371 \Rightarrow$ nulna hipoteza neće biti odbacena na bilo kojem nivou značajnosti manjem od 0,371.

$$\text{Za } \bar{X} = 7,8 \Rightarrow p \text{ vrijednost} = 0,014.$$